

## Modèle newtonien

Relativité générale  $\Rightarrow$  espace-temps non euclidien

Si l'espace est euclidien (cas probable), le modèle newtonien contient presque tous les résultats de la relativité générale

Principe cosmologique espace homogène et isotrope,  
Densité  $\rho(t)$

Particule de masse  $m$  à la distance  $r$  de l'observateur

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \qquad F = G \frac{M m}{r^2} \qquad V = - G \frac{M m}{r}$$

Théorème de Gauss : insensibilité à la matière extérieure à une sphère

$$E = T + V = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{r}$$

Vitesse tangentielle nulle (symétrie sphérique)

vitesse de libération  $v_l = \left( \frac{2GM}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$

Hypothèse supplémentaire : loi de Hubble  $v = H_0 r$

$$E = \frac{1}{2} m r^2 \left[ H_0^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho \right]$$

[...] indépendant de la particule test ( $m, r$ )

Densité de masse critique

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} ; G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\rho_c = 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$$

Distance de 2 galaxies  $r(t) = R(t) s$

Facteur d'échelle  $\times$  coordonnée comobile

dérivation  $\dot{r}(t) = \dot{R}(t) s = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} R(t) s = \left[ \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right] r(t)$

Compatible avec la loi de Hubble avec  $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$

$$E = \frac{1}{2} m s^2 R^2(t) \left[ H^2(t) - \frac{8\pi}{3} G \rho(t) \right]$$

Paramètre  $k$        $k = - \frac{2E}{m s^2}$       Indépendant du temps

$$k = R^2(t) \left[ \frac{8\pi}{3} G \rho(t) - H^2(t) \right] = \frac{8\pi}{3} G R^2(t) [\rho(t) - \rho_c(t)]$$

Indépendant de  $m$  et  $s$

Propriété de l'Univers entier, dimensionné  $t^2$

Changement d'unité  $\Rightarrow k$  change, signe conservé

$k = +1$  ;  $E < 0$  ;  $\rho > \rho_c$  expansion puis effondrement

$k = 0$  ;  $E = 0$  ;  $\rho = \rho_c$  expansion, vitesse  $v_l$

$k = -1$  ;  $E > 0$  ;  $\rho < \rho_c$  expansion infinie

## Modèles de Friedmann - Lemaître

$$\dot{R}^2(t) + k = \left( \frac{8\pi G}{3} \right) \rho(t) R^2(t)$$

Hypothèse de conservation de la masse  $\rho(t) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3(t)s^3}$

$$A^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) R^3(t) \quad \text{indépendant du temps}$$

$$\dot{R}^2(t) + k = \frac{A^2}{R(t)}$$

Modèle plat  $k = 0$   $\dot{R}(t) = \frac{A}{R(t)^{1/2}}$   $R(t) = \left( \frac{3A}{2} \right)^{2/3} t^{2/3}$

Age de l'Univers  $t_0$

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = \frac{A}{R(t_0)^{3/2}} = \frac{2}{3t_0}$$

Modèle fermé  $k = +1$

$$\dot{R}^2(t) + 1 = \frac{A^2}{R(t)}$$

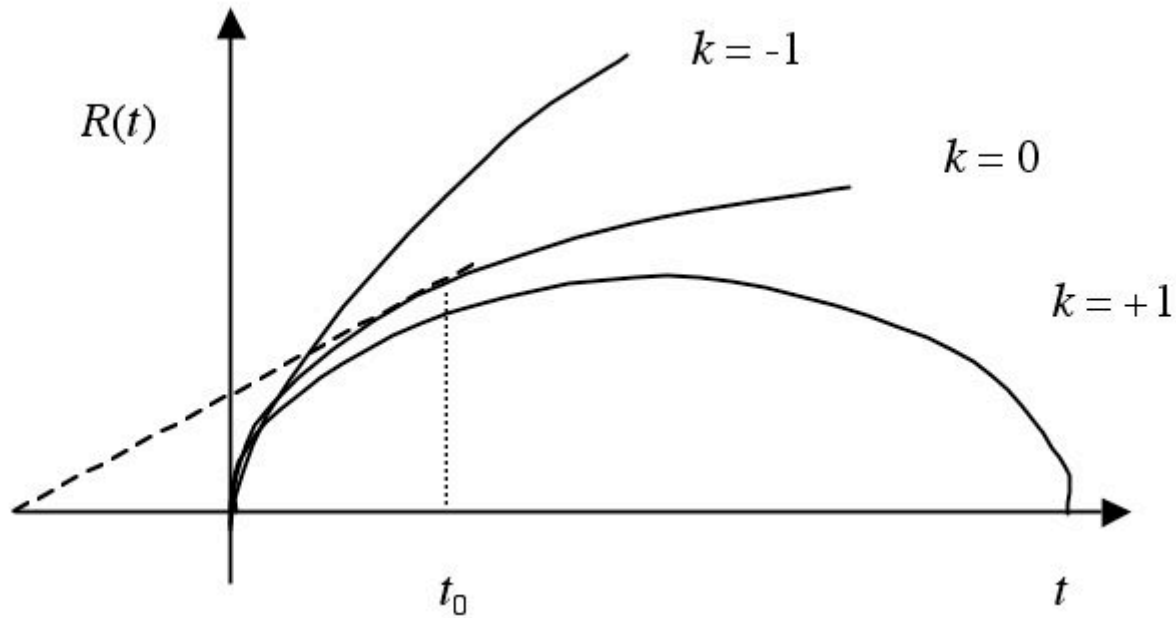
$$t = \int_0^R \left( \frac{R(t)}{A^2 - R(t)} \right)^{1/2} dR$$

cycloïde

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{2}A^2(1 - \cos\psi) \\ t = \frac{1}{2}A^2(\psi - \sin\psi) \end{array} \right.$$

Modèle ouvert  $k = -1$

$$R = \frac{1}{2}A^2(\operatorname{ch}\psi - 1) \quad t = \frac{1}{2}A^2(\operatorname{sh}\psi - \psi)$$



Généralisation : univers de rayonnement  $\neq$  univers de matière

$$E = M c^2 = \rho V c^2 = u V \quad p = u / 3$$

$$dE = -p dV \quad V du + u dV + p dV = 0$$

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{dR}{R} \quad \Rightarrow \quad R \frac{du}{dt} + 3(u + p) \frac{dR}{dt} = 0$$

Équation d'état  $p = f(\rho)$  et équation de Friedmann  
 $\rightarrow$  3 équations pour  $R, \rho, p$

Conservation de la matière  $\frac{d}{dt}(\rho R^3) = 0 \quad p = 0$   
 $\Rightarrow$  Univers newtonien

Matière ultra-relativiste ou univers de rayonnement

$$R \frac{d\rho}{dt} + 4\rho \frac{dR}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho R^4 \text{ conservé}$$

Diminution d'énergie des photons

Pour  $k = 0$        $\dot{R}^2 = \frac{A^2}{R^2}$        $\Rightarrow R(t) = (2A)^{1/2} t^{1/2}$

croissance plus lente de  $R(t)$  , décroissance plus rapide de  $E$

$\Rightarrow$  transition rayonnement - matière

$$1 + z = 1 / R$$

Rapport baryons/photons =  $6,5 \times 10^{-10}$        $\Rightarrow z_{eq} = 3500$

Découplage par formation des atomes d'hydrogène

Libre parcours moyen des photons  $>$  univers observable

( horizon )       $h = c \int_0^t \frac{dt}{R(t)}$        $h_r = 2 c t$  ;  $h_m = 3 c t$

Section efficace H neutre  $\ll$  H ionisé

Energie d'ionisation  $I = 13,6 \text{ eV}$   $k T_I = 157000 \text{ K}$

Boltzmann :  $\exp(-T_I / T_{dec}) \approx$  rapport atomes H / photons

Tenant compte de l'équilibre ionisation-recombinaison  
et de la proportion d'H excité :

$$T_{dec} = 3000 \text{ K} \quad T \sim 1 / R$$

$\Rightarrow$  époque du découplage  $z_{dec} = 1000$

Avant le découplage, équilibre thermique matière-rayonnement

$\Rightarrow$  spectre de corps noir du CMB

## Univers chaud

$$R \rightarrow 0 \quad T \rightarrow \infty$$

Pour  $kT \gg mc^2$ , création de particules et antiparticules de masse  $m$

$$m_e = 0,511 \text{ MeV}$$

$$m_p = 938,258 \text{ MeV}$$

$$m_n = 939,553 \text{ MeV}$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$n + \nu_e \rightarrow p + e^-$$

$$p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$$

Equilibre n-p pour  $T > \text{MeV}$

$$\frac{n}{p} \approx \exp \left[ - \frac{(m_n - m_p) c^2}{kT} \right]$$

Asymétrie matière-antimatière actuellement

Observation : pas de  $\gamma$  d'annihilation à 0,511 MeV  
dans l'Univers

Pb pour la physique des particules !

Non résolu par la non conservation de PC

Nucléosynthèse primordiale ~ nucléosynthèse stellaire  
mais en compétition avec l'expansion (Gamow 1946)

Entre 1 et 100 secondes

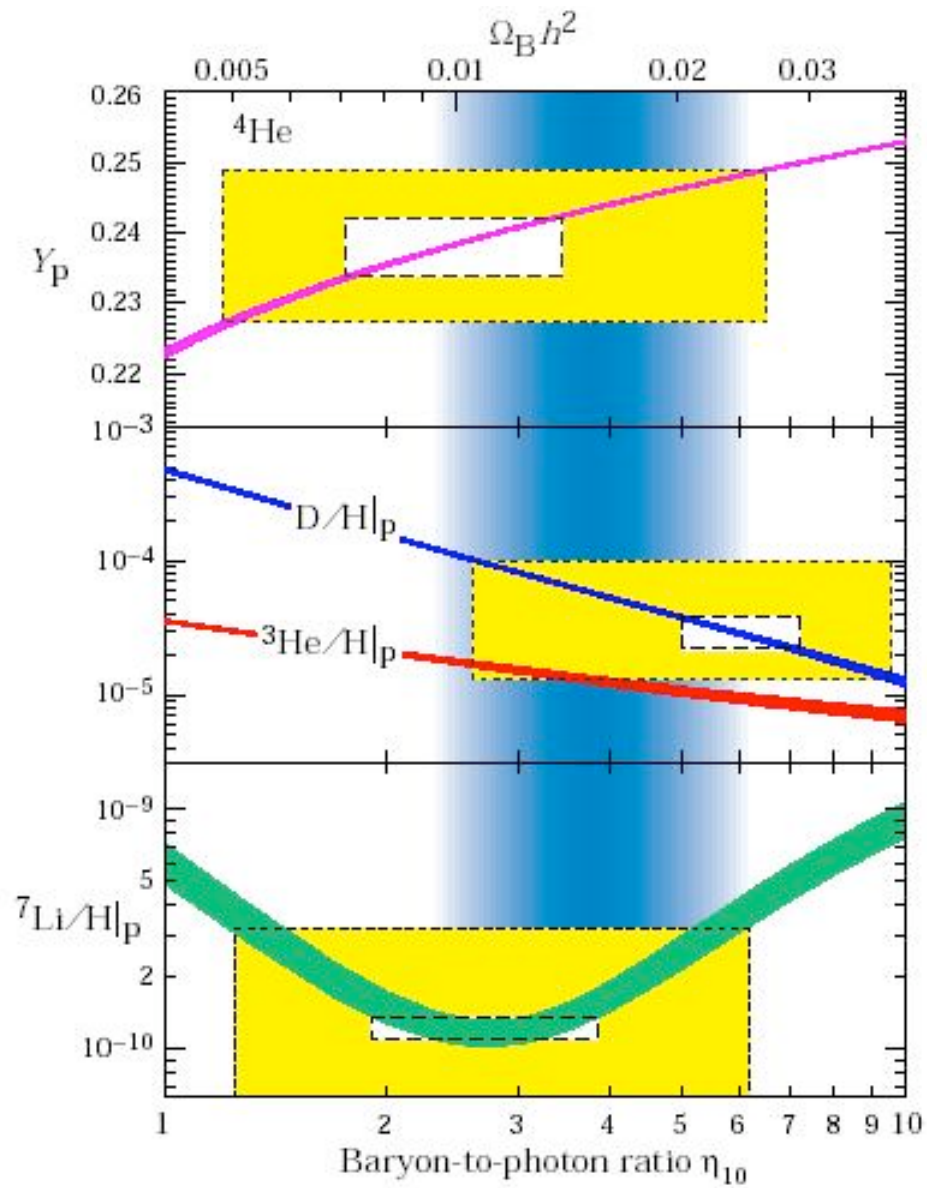
Production d'éléments légers ( hélium 24 % ) mesurée

Observation dans les nuages froids intergalactiques

⇒ évaluation de la densité baryonique  $\rho_B$

Densité réduite  $\Omega_B = \rho_B / \rho_c$

Composition du Soleil H / He  $\approx$  univers primitif



$$\Omega_B = 0,0470 \pm 0,0006$$

>>

$$\Omega_{lum} = 0,010 \pm 0,005$$

L'Univers n'est pas  
« fermé » par la matière  
Baryonique (  $\Omega = 1$  )

La matière lumineuse  
est minoritaire

$T$ (K)	$t$ (s)	Energie	Physique
$10^{32}$	$10^{-43}$	$10^{19}$ GeV	Echelle de Planck
$10^{29}$	$10^{-38}$	$10^{16}$ GeV	Grande unification
$10^{16}$	$10^{-12}$	1 TeV	Unification électrofaible
$10^{13}$	$10^{-6}$	1 GeV	Hadrons
$10^{10}$	1	2 MeV	Leptons
$10^9$	$10^2$	100 KeV	Noyaux légers
$3 \times 10^3$	$10^{13}$	0,3 eV	Atomes, galaxies, étoiles
3	$5 \times 10^{17}$	$2 \times 10^{-4}$ eV	Aujourd'hui

1 TeV accessible aux accélérateurs ( Rubbia 1983 )  
masse des bosons vecteurs de l'interaction faible  $\sim 100$  GeV  
Unification électromagnétisme-interaction faible

Unification interaction forte hypothétique

Echelle de Planck : théorie gravitation quantique ????

## Constante cosmologique

Introduite en relativité générale par Einstein

pour avoir un univers statique

⇒ modification de la loi de la gravité

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \qquad E_{pot} = -G \frac{M m}{r} + \frac{1}{6} \Lambda m c^2 r^2$$

Force de répulsion proportionnelle à la distance  $F = -\frac{1}{3} \Lambda m c^2 r$

« densité du vide » constante,  
positive ou négative  $\rho_v = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$

⇒ possibilité d'expansion accélérée